6 Differentialrechnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem zentralen Thema der Differentialrechnung, der Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. Entwickelt wurde die Differentialrechnung unabhängig voneinander von

Wissenschaftler 7:
Sir Isaac NEWTON, englischer Naturwissenschaftler
(04.01.1643 Woolsthorpe-by-Colsterworth (Lincolnshire)
- 31.03.1727 Kensington)

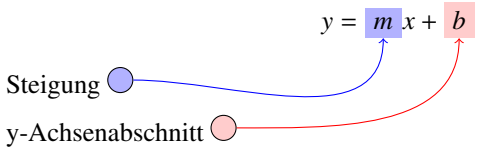
„Infinitesimalrechnung“ (1666)

Wissenschaftler 8:
Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, deutscher Naturwissenschaftler (21.06.1646 Leipzig - 14.11.1716 Hannover)

„Differentialrechnung“ (1670)

6.1 Differenzenquotient

Definition 6.1. Gegeben sei eine Gerade



Für die Steigung m gilt:

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diesen Quotienten bezeichnen wir als Differenzenquotienten.

6.2 Differentialquotient

Definition 6.2. Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ eine Funktion und sei $x_0 \in D_f$.

(D_f ist der Definitionsbereich der Funktion, vgl. 3.12).

Dann definieren wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Schreibweise nach NEWTON

Schreibweise nach LEIBNIZ

Dieser Quotient wird als Differentialquotient bezeichnet.

$f'(x_0)$ heißt auch die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.

Steigung einer Funktion

Bestimmen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 4$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f'(4) &= \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

6.3 Ableitung der Potenzfunktionen

Theorem 6.3. *Sei $n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in D_f$:*

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

6.3.1 Beispiel

Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2 \cdot x$
x^3	$3 \cdot x^2$
x^4	$4 \cdot x^3$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-1 \cdot x^{-2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$

Tabelle 14: Ableitungen der Potenzfunktion

6.4 Ableitungsregeln

Satz 6.4. *Seien $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ und $g\colon D_g \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *Summenregel:* $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$

(ii) *Faktorregel:* $\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$

(iii) *Produktregel:* $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(iv) *Quotientenregel:* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

(v) *Kettenregel:* $\big[f(g(x))\big]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bezeichnungen: Äußere Funktion: $f(\,)$, Innere Funktion: $g(x)$

6.5 Zusammenstellung elementarer Ableitungsfunktionen

Satz 6.5. *Wir stellen hier die Ableitungen einiger häufig benötigter Funktionen zusammen.*

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$1 + (tan(x))^2 = \frac{1}{(cos(x))^2}$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Tabelle 15: Ableitungen elementarer Funktionen

6.6 Ableitung trigonometrischer Funktionen

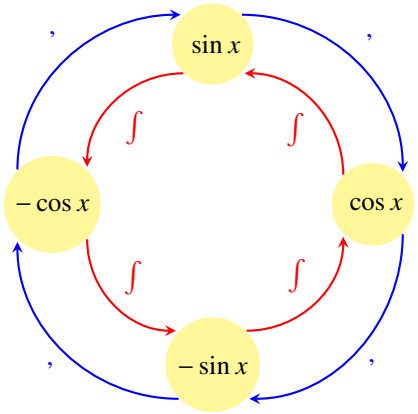


Abbildung 19: Ableitung Sinus - Cosinus

6.7 Notwendige Bedingung für Extremum

Satz 6.7. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$. Besitzt die Funktion $f(x)$ in $x_0 \in D_f$ ein Maximum oder ein Minimum, so gilt:*

$$f'(x_0) = 0 \quad (\text{„waagerechte Tangente“})$$

Die Umkehrung

$$„f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Extremum in } x_0“$$

ist falsch !

Definition 6.8. Eine Stelle x_0 mit f'$(x_0) = 0$ heißt kritische Stelle der Funktion.

6.9 Erstes hinreichendes Kriterium für Extremum

Satz 6.9. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$. Dann gilt: Wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen*

$$\textit{der 1. Ableitung } f'(x) \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{von + nach -} \\ \textit{von - nach +} \end{array} \right\} \textit{, so wechselt}$$

$$\textit{die Steigung der Funktion} \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{von steigend auf fallend} \\ \textit{von fallend auf steigend} \end{array} \right\}$$

$$\textit{und an der Stelle } x_0 \textit{ liegt} \quad \left\{ \begin{array}{c} \textit{ein Maximum} \\ \textit{ein Minimum} \end{array} \right\} \textit{ vor.}$$

6.10 Höhere Ableitungen

Definition 6.10. Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine differenzierbare Funktion.

(i) Falls die Ableitung von $f'(x)$ existiert, so definieren wir die zweite Ableitung von $f(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

(ii) Analog definieren wir die dritte Ableitung von $f(x)$:

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

u.s.w.

6.11 Krümmung der Funktion

Definition 6.11. Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt: Die Funktion $f(x)$ ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{konkav}}\ (\underline{\text{gekrümmt}}) \\ \underline{\text{konvex}}\ (\underline{\text{gekrümmt}}) \end{array} \right\} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \left\{ \begin{array}{l} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{array} \right\}.$$

6.12 Zweites hinreichendes Kriterium für Extremum

Theorem 6.12. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$. Dann gilt:*

(i) $f'(x_0) = 0 \quad \underline{und} \quad f''(x_0) < 0$

$\Rightarrow$ *Die Funktion besitzt in x_0 ein Maximum.*

(ii) $f'(x_0) = 0 \quad \underline{und} \quad f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ *Die Funktion besitzt in x_0 ein Minimum.*

6.13 Wendestelle

Definition 6.13. Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und sei $x_0 \in D_f$.

Wechselt an der Stelle x_0 das Krümmungsverhalten der Funktion,

so heißt diese Stelle Wendestelle der Funktion.

6.14 Notwendiges Kriterium für Wendestelle

Satz 6.14. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$. Dann gilt: Besitzt die Funktion $f(x)$ in x_0 eine Wendestelle, so gilt $f''(x_0) = 0$.*

f"(x)=0 ist nicht hinreichend für Wendestelle

Die Umkehrung

$$\text{„}f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendestelle in } x_0\text{“}$$

ist falsch !

6.15 Hinreichendes Kriterium für Wendestelle

Theorem 6.15. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$.*

Dann gilt:

$$f''(x_0) = 0 \quad \underline{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ *Die Funktion besitzt in x_0 eine Wendestelle.*

6.16 Sattelstelle

Theorem 6.16. *Sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in D_f$.*

Dann gilt:

$$\underbrace{f'(x_0) = 0}_{\text{d. h. waagerechte Tangente}} \quad \text{und} \quad \underbrace{f''(x_0) = 0 \ \text{und} \ f'''(x_0) \neq 0}_{\text{d. h. Wendestelle}}$$

$\Rightarrow$ *Die Funktion besitzt in x_0 eine Sattelstelle , also eine*

Wendestelle mit waagerechter Tangente.

Anhang zur Differentialrechnung:

Hier werden die (bereits verwendeten) trigonometrischen Funktionen, die Exponentialfunktion sowie die Funktion des *logarithmus naturalis* definiert und deren Ableitungen bestimmt.

Dieser Anhang ist, was die Herleitungen angeht, nicht klausurrelevant. Die Resultate (also beispielsweise die Ableitungen der genannten Funktionen) sind sehr wohl klausurrelevant, denn sie sind im vorhergehenden Teil dieses Kapitels vorhanden.

6.17 Fakultät

Satz 6.17. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir*

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & \text{wenn } n > 0 \end{cases}$$

Dies wird n - Fakultät gelesen. [15]

. Die ersten Werte lauten:

$$\begin{array}{rcll} 0! & = & 1 & = & 1 \\ 1! & = & 1 & = & 1 \\ 2! & = & 1 \cdot 2 & = & 2 \\ 3! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 & = & 6 \\ 4! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 & = & 24 \\ 5! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & = & 120 \\ 6! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 & = & 720 \\ 7! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 & = & 5040 \\ 8! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 & = & 40320 \end{array}$$

Tabelle 16: Fakultäten

[15] Die Bezeichnung *Fakultät* stammt von Christian KRAMP (1760-1826), der sie 1798 einführte. Von ihm stammt auch die Notation $n!$ aus dem Jahr 1808.

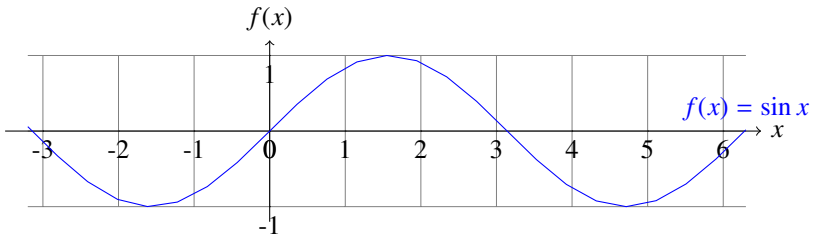
6.18 Sinusfunktion

Satz 6.18. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} sin\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

durch

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \dots$$



.

Abbildung 20: Graph der Sinusfunktion

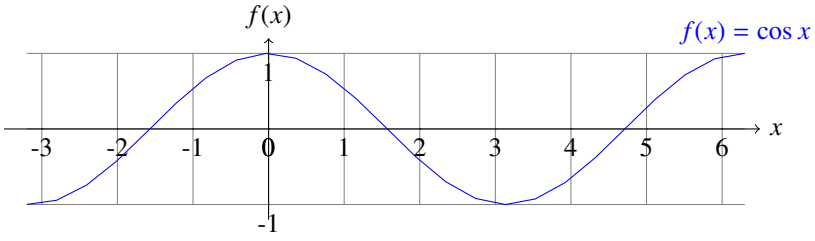
6.19 Cosinusfunktion

Satz 6.19. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} cos\colon \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

durch

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots$$



.

Abbildung 21: Graph der Cosinusfunktion

6.20 Exponentialfunktion

Satz 6.20. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto exp(x) = e^x \end{aligned}$$

durch

$$exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Insbesondere gilt für $x = 1$:

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$= 2.71828182845\dots \textit{(EULERsche Zahl)}$$

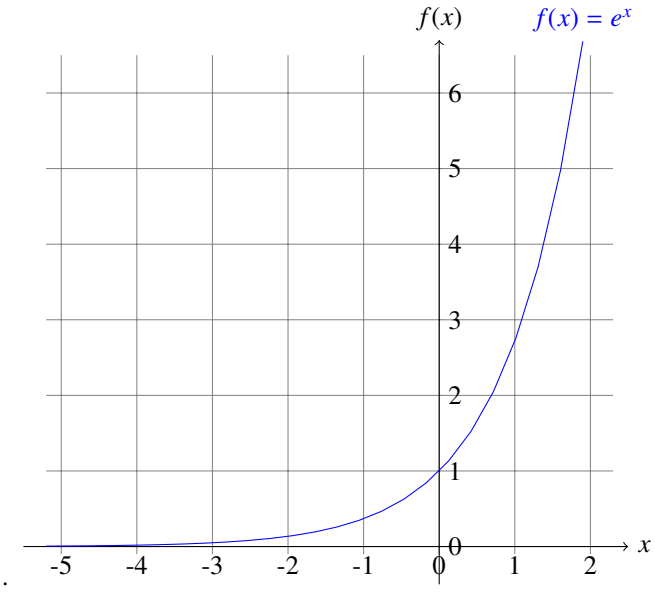


Abbildung 22: Graph der Exponentialfunktion

6.21 Injektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.21. *Die Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto exp(x) = e^x \end{aligned}$$

ist eine bijektive, also insbesondere auch injektive Funktion.
Daher ist sie nach 3.9 invertierbar.

Diese Umkehrfunktion wird als „natürlicher Logarithmus“ bezeichnet.

6.22 Logarithmus naturalis

Satz 6.22. *Wir bezeichnen die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion als „logarithmus naturalis“:*

$$\begin{aligned} ln\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x) \end{aligned}$$

durch

$$y = e^x = exp(x) \quad \Rightarrow \quad x = \overbrace{exp}^{-1}(y) = ln(y)$$

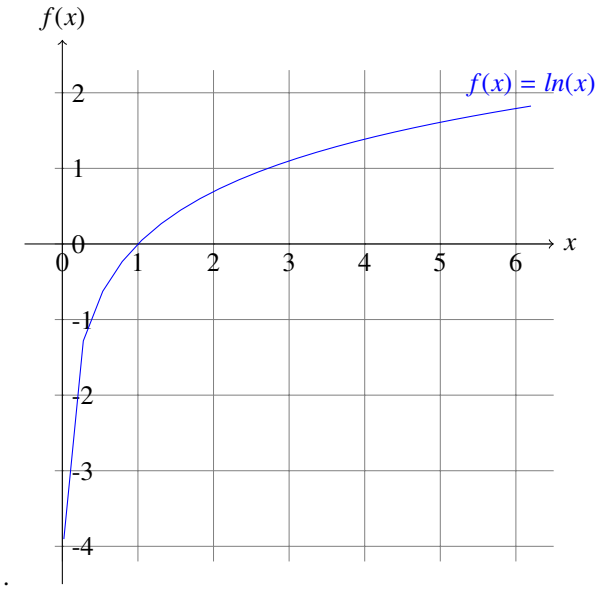


Abbildung 23: Graph der Logarithmusfunktion

6.23 Ableitung der Sinusfunktion

Satz 6.23. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Beweis. Sei x $\in \mathbb{R}$. Dann gilt nach 6.18

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \mp \dots$$

Gliedweises Differenzieren ergibt

$$(\sin(x))' = 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} - \frac{7x^6}{5040} + \frac{9x^8}{362880} \mp \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \mp \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots \quad \overset{=}{\scriptstyle 6.19} \quad \cos(x)$$

□

6.24 Ableitung der Cosinusfunktion

Satz 6.24. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Beweis. Sei x $\in \mathbb{R}$. Dann gilt nach 6.19

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \mp \dots$$

Gliedweises Differenzieren ergibt

$$(\cos(x))' = 0 - \frac{2x}{2} + \frac{4x^3}{24} - \frac{6x^5}{720} + \frac{8x^7}{40320} \mp \dots$$

$$= -\frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} \mp \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \quad -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \mp \dots = -(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots) \overset{=}{\scriptstyle 6.19} \quad -\sin(x)$$

□

6.25 Ableitung der Exponentialfunktion

Satz 6.25. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(e^x)' = e^x$$

Beweis. Sei x $\in \mathbb{R}$. Dann gilt nach 6.20

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \; 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Gliedweises Differenzieren ergibt

$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \dots$$

$$= \frac{x^0}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\overset{=}{\scriptstyle 6.17} \quad \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \overset{=}{\scriptstyle 6.20} \; e^x$$

□

6.26 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 6.26. *Sei*

$$f\colon D_f \to W_f$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

eine <u>invertierbare</u> Funktion und sei $\overset{-1}{f}$ die zu f inverse Funktion, vgl. 3.9

Dann gilt:

$$\left(\overset{-1}{f}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(\overset{-1}{f}(x)\right)}$$

Beweis.

$$\overset{-1}{f}(f(x)) = f\left(\overset{-1}{f}(x)\right) = x$$

Dann folgt nach der Kettenregel 6.4(v):

$$\left[f\left(\overset{-1}{f}(x)\right)\right]' = (x)' \qquad \Rightarrow$$

$$f'\left(\overset{-1}{f}(x)\right) \cdot \left(\overset{-1}{f}(x)\right)' = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\left(\overset{-1}{f}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(\overset{-1}{f}(x)\right)}$$

□

6.27 Ableitung der Logarithmusfunktion

Satz 6.27. *Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt:*

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Beweis. Sei x $\in \mathbb{R}_+$. Dann gilt, da die Exponentialfunktion und die Logarithmus naturalis-Funktion zueinander inverse Funktionen sind:

$$e^{ln(x)} = ln(e^x) = x$$

Dann folgt nach der Kettenregel 6.4(v):

$$\left(e^{ln(x)}\right)' = (x)' \qquad \Rightarrow$$

$$\left((e')^{ln(x)}\right) \cdot (ln(x))' = 1$$

Da die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist, folgt:

$$\left(e^{ln(x)}\right) \cdot (ln(x))' = 1$$

Nunmehr folgt aus $e^{ln(x)} = x$:

$$x \cdot (ln(x))' = 1$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □